MACIERZE LOSOWE
LISTA 5
Problem momentów

1. Pokazać, że momenty miary Gaussowskiej $N(0,1)$ są postaci
$$m_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \begin{cases} 0 & n \text{ nieparzyste} \\ (n-1)!! & n \text{ parzyste} \end{cases}$$

2. Stosując metodę indukcji, pokazać, że jeżeli n jest liczbą parzystą, to liczba wszystkich dwupartycji zbioru $\{1,\ldots,n\}$ jest równa $(n-1)!!$. Wywnioskować, że moment rzędu n standardowej miary Gaussowskiej $N(0,1)$ jest równy liczbie dwupartycji zbioru $\{1,\ldots,n\}$. Porównać momenty standardowej miary Gaussowskiej z momentami standardowej miary Wignera.

3. Wykazać, że jeżeli μ jest miarą probabilistyczną na prostej, której wszystkie bezwględne momenty $\int |x|^n d\mu$ są skończone, oraz $\mathbb{E}(e^{|tX|}) < \infty$ dla $|t| < r$, gdzie $r > 0$ oraz X jest zmienną losową o rozkładzie zadanym miarą μ, to funkcję charakterystyczną $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ można dla $|t| < r$ rozwinąć w szereg potęgowy
$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \frac{(it)^n}{n!}.$$
Wywnioskować, że w tym przypadku $\varphi^{(n)}(0) = i^n m_n$, gdzie $m_n = \int x^n d\mu$.

4. Pokazać oszacowanie
$$\left| e^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$$
dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

5. Pokazać, że dla funkcji charakterystycznej $\varphi(t)$ zachodzi wzór
$$\mathbb{E}\left(iX^k e^{itX}\right) = \varphi^{(k)}(t)$$

6. Przy założeniach zadania 3 i korzystając z zadań 4,5, pokazać, że zachodzi wzór
$$\varphi(t+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(t)}{n!} h^n$$
dla $|h| < r$.

7. Wykazać, że przy założeniach zadania 3 nie istnieje inna miara posiadająca taki sam ciąg momentów (m_n), czyli że tzw. problem momentów jest jednoznaczny (jest to Twierdzenie 30.1 w książce Billingsleya *Prawdopodobieństwo i miara*).

8. Uzasadnić, że jeżeli μ jest miarą o nośniku zwartym, to jej ciąg momentów wyznacza tę miarą jednoznacznie.

9. Sprawdzić, że ciąg momentów miary Gaussowskiej, mimo że jej nośnik nie jest zwarty, spełnia założenia zadania 3, a więc na podstawie zadania 7, nie ma innej miary probabilistycznej na prostej o tych samych momentach.

10. Różne miary mogą mieć jednak te same momenty. Zbadać podawany zazwyczaj w tym kontekście przykład dwóch miar, o gęstościach

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-(\log x)^2/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

oraz $g(x) = f(x)(1+\sin(2\pi \log x))$. Pokazać, że miary te mają takie same momenty skończone (obliczyć je), czyli że w tym przypadku problem momentów nie jest jednoznaczny.

Romuald Lenczewski